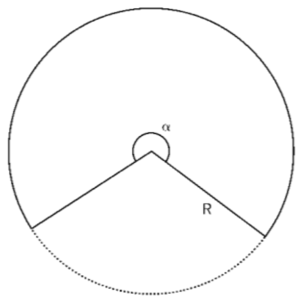
Simulazione della seconda prova di matematica
22 aprile 2016

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta.
Tempo massimo assegnato alla prova: tre ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile scientifica non programmabile.

PROBLEMA 1: Il gelato



Alberto lavora in una ditta che produce gelati, nel reparto che si occupa di realizzare gli incarti. Oggi deve progettare un involucro di forma conica, ricavato tagliando un settore circolare da un disco di raggio R assegnato, in modo che R sia l'apotema del cono.

a. Posta 2x la misura in radianti dell'angolo α, al centro del settore circolare che rappresenta lo sviluppo del cono, spiega dettagliatamente come Alberto può ricavare il volume del cono in funzione di x.

Alberto ha ottenuto la seguente espressione e per il volume del cono:

$$V(x) = \frac{R^3}{3\pi^2} x^2 \sqrt{\pi^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 \le x \le \pi$$

b. Dopo aver verificato la correttezza dell'espressione precedente, in base a considerazioni generali e senza ricorrere a calcoli spiega perché Alberto può essere certo che vi sia un particolare valore di x, nell'intervallo [0;π], in corrispondenza del quale il volume del cono è massimo.

c. Posto $R = \sqrt[3]{\pi^2}$ dm , studia e rappresenta la corrispondente funzione di V (x). Determina il valore di x che realizza l'incarto con la capienza massima, esprimendone la misura sia in radianti sia in gradi e primi. Calcola anche il valore della capienza massima, approssimando il dato ai cm^3.

Ora Alberto deve affrontare un secondo problema: realizzare la base circolare di ciascun contenitore conico. Poiché la realizzazione di ciascun involucro lascia come scarto un secondo settore circolare, Alberto si chiede se sia possibile utilizzare tale scarto, ricavandone il cerchio di maggior raggio possibile, cioè quello inscritto nel settore stesso.

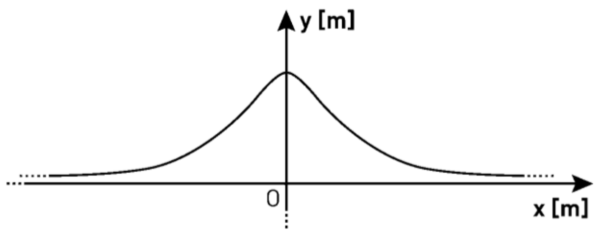
d. Spiega ed Alberto, utilizzando semplici considerazioni geometriche qualitative, perché non sia possibile realizzare la sua idea nel caso dell'involucro di capienza massima.

e. Dimostra che il raggio s della circonferenza inscritta nel settore circolare scartato è dato, sempre in funzione di x, dall'espressione

$$s(x) = \frac{R \sin x}{1 + \sin x}$$

PROBLEMA 2: Il tunnel

Un gruppo di ingegneri civili è al lavoro per realizzare una condotta idraulica. Per questo scopo si rende necessario lo scavo di un tunnel sotto a un terrapieno, la cui sezione trasversale è rappresentata dal grafico a destra; l'asse x rappresenta il piano orizzontale, l'asse y la direzione verticale e l'unità di misura su entrambi gli assi è il metro.



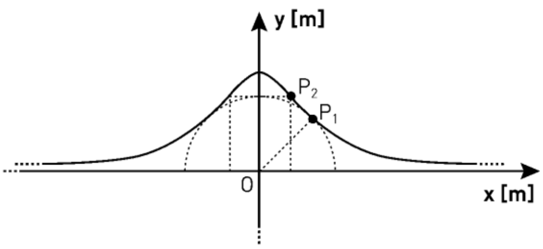
a. Quale tra questi due tipi di funzione ritieni sia stato scelto dal gruppo di ingegneri per meglio rappresentare il profilo del terrapieno? Motiva la tua risposta.

$$y_1(x) = \frac{x^2 + A}{1 + x^2} \qquad y_2(x) = \frac{A}{1 + x^2}$$

b. Appurato che la scelta è ricaduta su una funzione del secondo tipo, dimostra che deve essere A = 2 affinché i punti di massima pendenza (in valore assoluto) del profilo del terrapieno si trovino a un'altezza di 1,5 metri dal livello del suolo. Studia e rappresenta la funzione così determinata.

Indica che significato ha l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx$ e stabilisci se converge.

c. Per quanto riguarda la realizzazione del tunnel della condotta, nel gruppo di ingegneri emergono due progetti alternativi. Il primo prevede un tunnel a sezione semicircolare, e per massimizzare l'area della sezione si deve determinare il punto P_1 del profilo del terrapieno che si trova alla minima distanza dal centro O della sezione.



Il secondo progetto prevede un tunnel a sezione rettangolare, determinato dal punto P_2 del profilo che definisce il rettangolo inscritto di area massima.

Ricava P_1 e P_2 e dimostra che il secondo progetto è comunque da scartare se si vuole ottimizzare la portata della condotta.

d. Ricava la portata massima, in litri/secondo, delle due possibili condotte, supponendo che la sezione della tubatura coincida con quella del tunnel e che l'acqua vi scorra a una velocità uniforme e costante di 2 m/s.

e. Dimostra che sarebbe possibile realizzare una condotta completamente interrata di portata ancora maggiore se la sezione fosse un triangolo isoscele rettangolo con ipotenusa sull'asse delle ascisse. Calcola anche in questo caso la portata massima, nelle stesse condizioni precedenti.