ESERCITAZIONE 10 GIUGNO 2016

IL TESTO DEL PROBLEMA

In una località sull'Oceano Atlantico la marea ha una notevole escursione e per questo è importante prevederne l'andamento. In prima approssimazione si è visto che il livello del mare può essere descritto dalla seguente funzione del tempo t:

$$h(t) = A - A\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-b)\right], \quad \text{con } A, b \in \mathbb{R}^+.$$

a) Esprimendo t in ore e h in metri, determina i valori dei parametri A e b in modo che valgano contemporaneamente le seguenti condizioni:

- l'escursione tra il livello minimo e quello massimo sia di 8,0 m;
- si abbia il livello massimo per $t = 8{,}0$ ore (si scelga il minor valore positivo possibile per b).

b) Verificato che si ha $A = 4$ e $b = 2$, traccia il grafico della funzione h così determinata. Determina poi in che istanti nel corso delle prime ventiquattro ore a partire da $t = 0$ la variazione del livello è più rapida (sia in crescita sia in diminuzione) e quanto vale in tali istanti la velocità di variazione.

c) Calcola la velocità di variazione del livello del mare all'istante $t = 4$ ore. Supponendo che nelle due ore successive la velocità di innalzamento delle acque sia costante e pari al valore appena determinato, stima il livello del mare all'istante $t = 6$ ore. Che interpretazione geometrica si può dare di questo procedimento?

d) Un turista, meravigliato da una marea che sale così rapidamente, ne misura costantemente la velocità a partire da $t = 15$ ore e osserva preoccupato che tale velocità aumenta continuamente. A che istante potrà rilassarsi rilevando che la velocità comincia a diminuire? Che cosa rappresenta questo istante per il grafico di $h(t)$?

e) Supponi di installare sul livello del mare, in verticale, un tubo cavo della sezione di 1 m^2, in modo che l'acqua possa risalirvi all'interno durante l'aumento di marea. Assunto come 0 il livello dell'acqua nel tubo all'istante di bassa marea, calcola il volume medio di acqua contenuta nel tubo nell'intervallo di tempo [2; 8].

LO SVOLGIMENTO

a) Al variare di t, la funzione $y = \cos\left[\frac{\pi}{6}(t-b)\right]$ assume valori compresi fra -1 e 1, quindi il livello del mare h assume valori compresi fra $h_{\min} = A - A = 0$ e $h_{\max} = A + A = 2A$.

L'escursione fra i due livelli vale $2A$ e, affinché questa sia pari a 8, deve essere $A = 4$ (metri).

Il livello massimo si ha quando il coseno vale -1; se questo si verifica per $t = 8$, allora deve essere:

$$\cos\left[\frac{\pi}{6}(8-b)\right] = -1 \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6}(8-b) = \pi + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \;\rightarrow\; 8 - b = 6 + 12k \;\rightarrow$$

$$b = 2 - 12k.$$

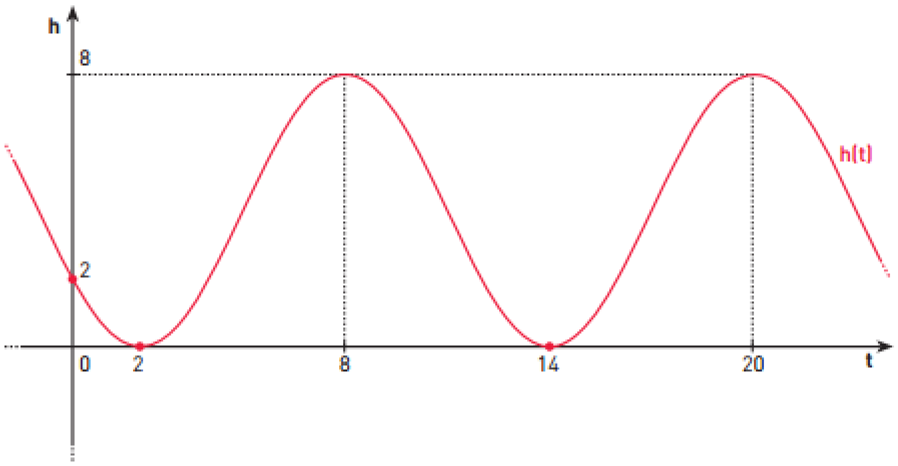
La più piccola soluzione positiva si ha per $k = 0$ ed è $b = 2$.

La corrispondente funzione $h(t)$, per i valori trovati, è:

$$h(t) = 4 - 4\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-2)\right] = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

b) Si tratta di una funzione cosinusoidale traslata a destra lungo l'asse x di 2 unità, di periodo $2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12$, dilatata lungo l'asse y di -4 e traslata lungo l'asse y di 4 unità.

Tracciamo il suo grafico.



La velocità di variazione di $h(t)$ è data, in ogni istante, dalla sua derivata prima:

$$h'(t) = \frac{2}{3}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

La velocità raggiunge il valore massimo (pari a $\frac{2}{3}\pi \simeq 2{,}09$ km/h) quando il seno vale 1, quindi per:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow t = 5 + 12k \rightarrow t_1 = 5 \vee t_2 = 17.$$

La velocità raggiunge invece il valore minimo (pari a $-\frac{2}{3}\pi \simeq -2{,}09$ km/h) quando il seno vale -1, quindi per:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow t = -1 + 12k \rightarrow t_1 = 11 \vee t_2 = 23.$$

c) All'istante $t = 4$ ore il mare ha raggiunto il livello (in metri):

$$h(4) = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 4 - \frac{\pi}{3}\right) = 2,$$

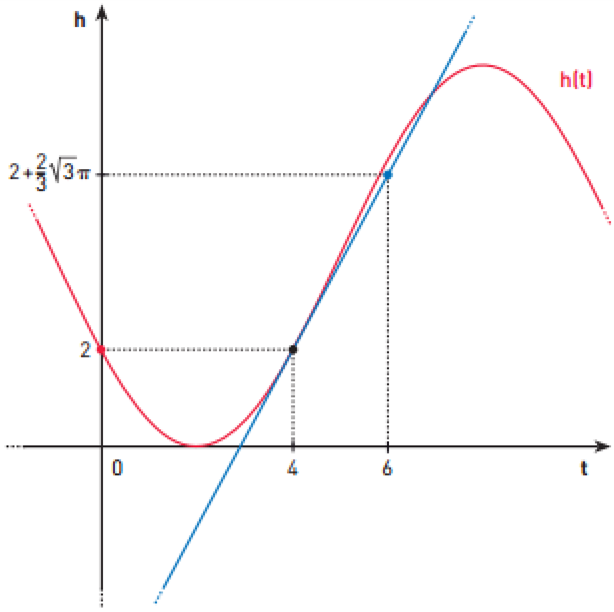
con una velocità di innalzamento (espressa in metri all'ora) pari a:

$$h'(4) = \frac{2}{3}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 4 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Se tale velocità di innalzamento rimanesse costante, dopo due ore il mare raggiungerebbe il livello:

$$y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \cdot 2 \simeq 5{,}63.$$

Questo metodo equivale ad approssimare la funzione $h(t)$, nell'intervallo $[4; 6]$, con la retta tangente al grafico di $h(t)$ nel punto di ascissa 4.



d) La velocità di innalzamento massima, successiva alle ore 15, si ha alle ore 17 e vale $h'(17) = \frac{2}{3}\pi$ (metri/ora), poi inizia a diminuire. In corrispondenza di $t = 17$ il gafico presenta un punto di flesso, infatti:

$$h''(t) = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow h''(17) = \frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 17 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

e) Il volume di acqua all'interno del tubo, in ogni istante t, è dato da $S \cdot h(t)$, dove S è la sezione unitaria ($1\ \mathrm{m}^2$) del tubo. Il volume medio di acqua contenuta nel tubo è quindi data da:

$$V_{\text{medio}} = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}} \cdot \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} S \cdot h(t)\,dt = \frac{1}{8-2} \cdot \int_2^8 \left[4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[4t - \frac{24}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)\right]_2^8 = \frac{1}{6} \cdot \left[32 - \frac{24}{\pi}\sin\left(\frac{8\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) - 8 + \frac{24}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$

Il volume medio di acqua all'interno del tubo, nell'arco delle 6 ore che intercorrono tra la bassa marea e l'alta marea, è di $4\ \mathrm{m}^3$.