

**PROBLEMA 1**

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto  $P$ . Nel sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$  le posizioni della nave  $P$ , misurate negli istanti  $t = 0$  e  $t = 10$  (il tempo  $t$  è misurato in minuti, le coordinate  $x$  e  $y$  sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti  $P_1(14, 13)$  e  $P_2(12, 11)$ . Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave  $Q$  è data dai punti  $Q_1(12, -2)$  e  $Q_2(11, -1)$ . Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in Figura 1 (non in scala). L'area indicata con ZMP è una "Zona Marittima Pericolosa". Il raggio luminoso di un faro posto nel punto  $F$  di coordinate  $(0, 1)$  spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi Figura 1).

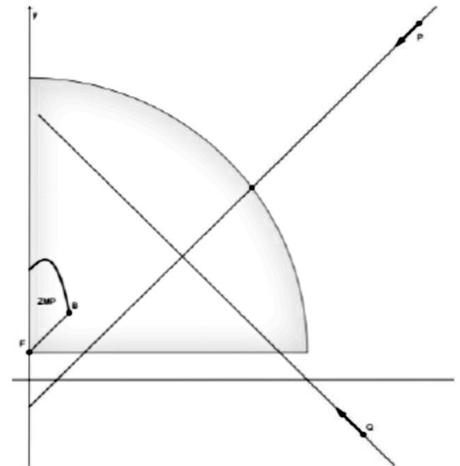


Figura 1

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave  $P$  avvista per la prima volta il faro  $F$ , essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.
2. Determina la posizione della nave  $P$  nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave  $Q$  è pari a 9 miglia.
3. Determina l'istante  $t$  nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.
4. Nel punto  $B(X_B, Y_B)$  si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  che si intersecano nel punto  $B$  e sono definite da:  $f(x) = -x^3 + x + 4, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq x_B$   $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq x_B$  e dalla retta  $x = 0$ .  
Calcola l'area della ZMP

**Soluzione**

**1. Traiettorie**

Determiniamo le equazioni delle due rette su cui si muove ciascuna nave.

Equazioni parametriche della traiettoria della prima nave

$$P(t) \begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{cases}$$

Imponendo che nell'istante  $t = 0$  la nave si trova nel punto  $P_1(14; 13)$  e nell'istante  $t=10$  nel punto  $P_2(12;11)$

$$\begin{cases} 14 = x_0 \\ 13 = y_0 \\ 12 = x_0 + 10v_x \\ 11 = y_0 + 10v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 14 \\ y_0 = 13 \\ v_x = -\frac{1}{5} \\ v_y = -\frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow P(t) \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5} t \\ y = 13 - \frac{1}{5} t \end{cases} \rightarrow \text{eliminando il parametro } t \text{ si ottiene}$$

l'equazione della traiettoria:  $y = x - 1$

Allo stesso risultato si perviene scrivendo l'equazione della retta per i due punti  $P_1(14; 13)$  e  $P_2(12; 11)$

$$\frac{x - 12}{2} = \frac{y - 11}{2} \rightarrow y = x - 1$$

Analogamente , per la seconda nave

$$\begin{cases} 12 = x_0 \\ -2 = y_0 \\ 11 = x_0 + 10v_x \\ -1 = y_0 + 10v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 12 \\ y_0 = -2 \\ v_x = -\frac{1}{10} \\ v_y = +\frac{1}{10} \end{cases} \rightarrow$$

$$Q(t) \begin{cases} x = 12 - \frac{1}{10} t \\ y = -2 + \frac{1}{10} t \end{cases} \quad \text{eliminando il parametro } t \text{ si ottiene l'equazione della traiettoria}$$

$$x + y = 10$$

che corrisponde alla retta passante per  $Q_1(12; -2)$  e  $Q_2(11 - 1)$

$$\frac{x - 11}{1} = \frac{y + 1}{-1} \rightarrow y = -x + 1$$

$\text{Traiettoria della nave } P : P(t) \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5} t \\ y = 13 - \frac{1}{5} t \end{cases} \rightarrow \quad y = x - 1$
$\text{Traiettoria della nave } Q : Q(t) \begin{cases} x = 12 - \frac{1}{10} t \\ y = -2 + \frac{1}{10} t \end{cases} \quad y = -x + 10$

### Distanza minima dal faro

Primo metodo

La distanza  $\overline{PF}$  in funzione di  $t$  è

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5} t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5} t - 1\right)^2}$$

Essendo una funzione sempre positiva, il suo minimo corrisponde al minimo di  $\overline{PF}^2$

Il radicando è una funzione quadratica il cui grafico è una parabola con la concavità verso l'alto e il cui punto di minimo è il vertice.

Annullando la derivata prima si trova

$$14 - \frac{1}{5}t + 12 - \frac{1}{5}t = 0 \rightarrow \frac{1}{5}t = 13 \rightarrow t = 65$$

Pertanto

$$\overline{PF}_{\text{minimo}} = \sqrt{(14 - 13)^2 + (13 - 13 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

Secondo metodo

La generica posizione della nave P, in funzione di x, è  $P(x, x - 1)$

La distanza da F è

$$\overline{PF} = \sqrt{(x)^2 + (x - 1 - 1)^2}$$

La distanza minima si ha per

$$2x - 2(x - 2) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P_4(1; 0) \rightarrow \overline{P_4F} = \sqrt{2}$$

**OSSERVAZIONE**

La distanza PF è minima quando il segmento PF è perpendicolare alla traiettoria, cioè è uguale alla distanza tra il punto F (0;1) e la retta di equazione  $y - x + 1 = 0$

$$\frac{|1 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

La posizione  $P_3(8,7)$  in cui P avvista il faro si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 100 \\ y = x - 1 \end{cases} \rightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \rightarrow (x + 6)(x - 8) = 0$$

Le due soluzioni sono

$$x = -6 \rightarrow y = -7$$

$$x = 8 \rightarrow y = 7$$

Poiché P si muove nel verso delle x e delle y decrescenti, (8;7) rappresenta la posizione in cui P avvista il faro la prima volta.

La posizione  $P_3$  corrisponde al valore del tempo  $t_3$

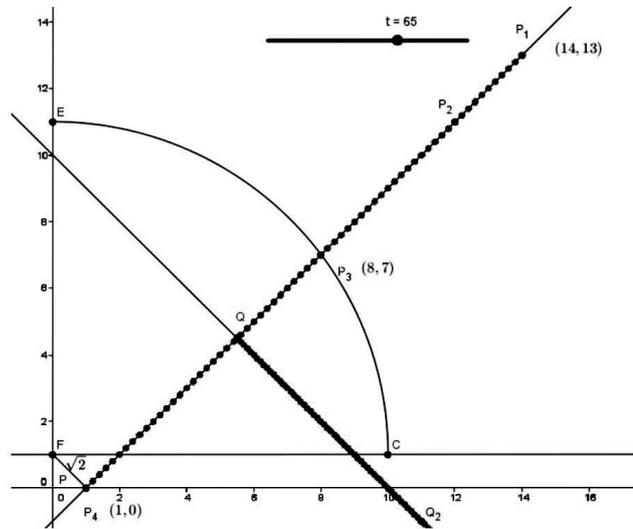
$$P_3 \begin{cases} 8 = 14 - \frac{1}{5}t_3 \\ 7 = 13 - \frac{1}{5}t_3 \end{cases} \rightarrow t_3 = 30$$

La posizione  $P_4$  corrisponde al valore del tempo  $t_4$

$$P_4 \begin{cases} 1 = 14 - \frac{1}{5}t_4 \\ 0 = 13 - \frac{1}{5}t_4 \end{cases} \rightarrow t_4 = 65$$

**Intervallo di tempo trascorso tra l'istante in cui P avvista il faro e l'istante in cui la loro distanza è minima**

$$\Delta t = t_4 - t_3 = 65 - 30 = 35 \text{ minuti}$$



Allo stesso risultato si perviene mediante la proporzione, valida per un moto uniforme

$$\frac{P_1P_2}{10} = \frac{P_3P_4}{\Delta t} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{70}{2} = 35$$

La nave P raggiunge la minima distanza dal faro F dopo 35 minuti dall'istante in cui lo avvista la prima volta, e la misura di tale distanza è circa 1,41 miglia.

2.

La distanza tra le due navi, al generico tempo  $t$ , è

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2} = \\ &= \sqrt{229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2} \end{aligned}$$

Imponendo

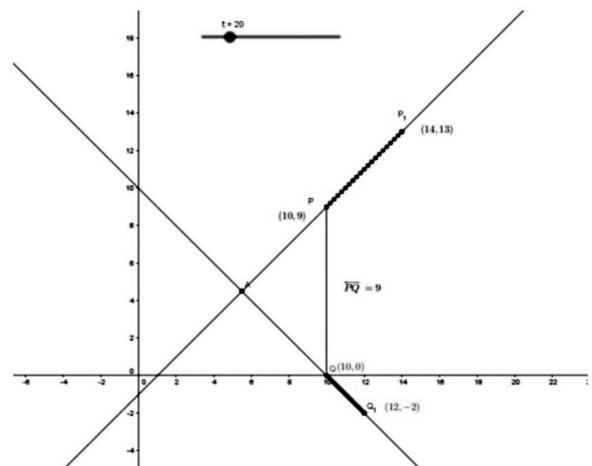
$$\sqrt{229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2} = 9 \rightarrow 229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2 = 81 \rightarrow t^2 - 94t + 1480 = 0$$

Le soluzioni sono (*in minuti*)

$$t = 47 \pm \sqrt{729} \rightarrow t = 74 \quad \cup \quad t = 20$$

La posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è di 9 miglia, corrisponde a  $t=20$ , per cui

$$P(20) \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5} \cdot 20 \\ y = 13 - \frac{1}{5} \cdot 20 \end{cases} \rightarrow P(20) \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$$



3. Riprendiamo l'espressione della distanza PQ in funzione di  $t$

$$\overline{PQ} = D(t) = \sqrt{229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2}$$

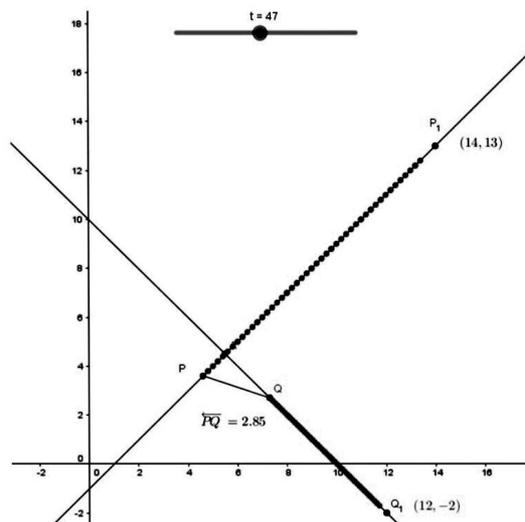
Poiché è sempre positiva  $D(t)$  assume il valore minimo quando è minimo il suo quadrato

La funzione  $Y = 229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2$  ha per grafico una parabola con la concavità verso l'alto che assume il valore minimo in corrispondenza del vertice

$$V\left(47; \frac{81}{10}\right)$$

$$D(t) \text{ minima} = \frac{9}{10}\sqrt{10} \cong 2,85 \text{ miglia}$$

la distanza tra le due navi è minima all'istante  $t = 47$  e il valore di tale distanza è di circa 2,85 miglia .



4. Determiniamo le coordinate del punto B risolvendo il sistema  $\begin{cases} y = -x^3 + x + 4, \\ y = x + 1 \end{cases}$

sottraendo membro a membro si trova  $0 = -x^3 + 3 \rightarrow x = \sqrt[3]{3}$

$$B(\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{3} + 1)$$

L'area della zona ZMP è uguale a

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + x + 4 - x - 1) dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + 3) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3x\right]_0^{\sqrt[3]{3}} =$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{3}}{4} + 3\sqrt[3]{3} = \frac{9}{4}\sqrt[3]{3} \cong 3,25 \text{ mi}^2$$

