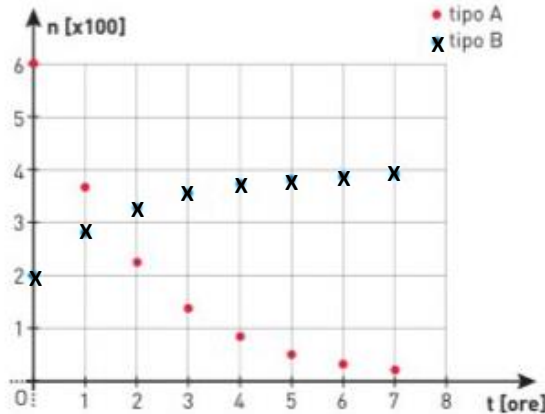


ESERCITAZIONE CLASSI QUINTE LICEO SCIENZE APPLICATE – 16/06/16

Un esperimento di microbiologia

Anna è ricercatrice in un laboratorio di microbiologia e sta eseguendo un'analisi comparata su due ceppi di una particolare specie batterica. In un esperimento recente ha osservato l'evoluzione della popolazione batterica in una coltura in cui convivevano entrambi i ceppi A e B. Dopo aver immesso nella coltura un certo numero iniziale di batteri dei due tipi, ha monitorato ogni ora il numero medio di batteri $n_A(t)$ e $n_B(t)$ ancora vivi. Il grafico sottostante riporta il risultato delle sue osservazioni.



Dalle osservazioni condotte, Anna ritiene di poter estrapolare due possibili modelli matematici per esprimere $n_A(t)$ e $n_B(t)$ in funzione del tempo:

$$n_A(t) = Ae^{-\frac{t}{2}}; \quad n_B(t) = C(1 - e^{-\frac{t}{2}}) + B.$$

- a) Spiega perché le funzioni proposte da Anna sono plausibili e stabilisci quali valori siano da attribuire alle costanti A , B e C affinché tali funzioni riproducano al meglio le osservazioni sperimentali.
- b) Dopo aver verificato che i valori suddetti sono $A = 600$, $B = 200$ e $C = 200$, studia e rappresenta in uno stesso diagramma le funzioni corrispondenti a tali valori, nell'intervallo $t \in [0; +\infty[$. Determina in particolare l'istante t_0 in cui le popolazioni dei due tipi di batteri sono ugualmente numerose.

In una variante dell'esperimento, a partire dalle stesse condizioni iniziali, giunti all'istante t_0 in cui le due popolazioni batteriche si trovano in equilibrio, Anna immette nella coltura un composto organico che ha l'effetto di stabilizzare i tassi istantanei di variazione $n'_A(t_0)$ e $n'_B(t_0)$ delle due popolazioni, e da quel momento i tassi di variazione restano costanti.

- c) Dopo quanto tempo, a partire da t_0 , non ci saranno più batteri vivi del ceppo A? Qual è il numero di batteri del ceppo B ancora vivi nell'istante t_1 in cui la popolazione A si estingue?
- d) Riporta in un unico diagramma i grafici dei modelli funzionali di questo secondo esperimento nell'intervallo $[0; t_1]$.

In un terzo esperimento, relativo al solo ceppo batterico di tipo A, Anna modifica il genoma della popolazione batterica e ora il modello che ne descrive la crescita è il seguente:

$$N_A(t) = \frac{t}{2} \cdot n_A(t) + 300,$$

dove $n_A(t)$ è la funzione determinata al precedente punto a.

- e) Dimostra che ora la popolazione batterica del ceppo A non rischia più l'estinzione e che esiste un istante in cui la sua numerosità è massima: ricava tale istante e il corrispondente valore massimo.